

Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2011

Exercice n°0

Questionnaire culturel

Éléments de correction du travail mathématique

Bin	Chr	Bin	Chr	Bin	Chr	Bin	Chr
00000	<spc>	01000	H	10000	P	11000	X
00001	A	01001	I	10001	Q	11001	Y
00010	B	01010	J	10010	R	11010	Z
00011	C	01011	K	10011	S	11011	.
00100	D	01100	L	10100	T	11100	,
00101	E	01101	M	10101	U	11101	?
00110	F	01110	N	10110	V	11110	!
00111	G	01111	O	10111	W	11111	-

10110	00011	11011	01111	11010	11111	00110	00001	10100	11110	10000	10111
10101	01010	10101	01010	10101	01010	10101	01010	10101	01010	10101	01010
00011	01001	01110	00101	01111	10101	10011	01011	00001	10100	00101	11101
C	I	N	E	O	U	S	K	A	T	E	?

La réponse est donc : **CINE OU SKATE ?**



Exercice n°1

Kaceboof

8 points

1. On peut utiliser le tableau de la façon suivante :

on met dans une première colonne le nombre d'amis organisateurs.

Dans la seconde, on met le nombre de personnes invitées le 2 mai, ce qui correspond au triple de la première colonne. Puis, on continue ainsi jusqu'au 8 mai.

Ensuite, dans une dernière colonne, on fait la somme de toutes les personnes invitées (y compris les organisateurs).

On « tire » alors les lignes du tableau jusqu'à obtenir le nombre de personnes désirées.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Nombre d'amis au	Nombre de nouveaux invités au							nombre total d'invités
2	01/05/10	02/05/10	03/05/10	04/05/10	05/05/10	06/05/10	07/05/10	08/05/10	le midi du 08/05/10
3									
4	1	3	9	27	81	243	729	2187	3280
5	2	6	18	54	162	486	1458	4374	6560
6	3	9	27	81	243	729	2187	6561	9840
7	4	12	36	108	324	972	2916	8748	13120
8	5	15	45	135	405	1215	3645	10935	16400
9	6	18	54	162	486	1458	4374	13122	19680
10	7	21	63	189	567	1701	5103	15309	22960
11	8	24	72	216	648	1944	5832	17496	26240
12	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	29520
13	10	30	90	270	810	2430	7290	21870	32800
14	11	33	99	297	891	2673	8019	24057	36080
15	12	36	108	324	972	2916	8748	26244	39360
16	13	39	117	351	1053	3159	9477	28431	42640
17	14	42	126	378	1134	3402	10206	30618	45920
18	15	45	135	405	1215	3645	10935	32805	49200
19	16	48	144	432	1296	3888	11664	34992	52480
20	17	51	153	459	1377	4131	12393	37179	55760

Il y a 5 amis organisateurs.

2. On peut utiliser le tableur de la façon suivante :

	A	B	C
22	jour	Nouveaux invités	nombre total
23	01/05/10	5	5
24	02/05/10	15	20
25	03/05/10	45	65
26	04/05/10	135	200
27	05/05/10	405	605
28	06/05/10	1215	1820
29	07/05/10	3645	5465
30	08/05/10	10935	16400
31	09/05/10	32805	49205
32	10/05/10	98415	147620
33	11/05/10	295245	442865
34	12/05/10	885735	1328600
35	13/05/10	2657205	3985805
36	14/05/10	7971615	11957420
37	15/05/10	23914845	36872265
38	16/05/10	71744535	107616800
39	17/05/10	215233605	322850405
40	18/05/10	645700815	968551220
41	19/05/10	1937102445	2905653665

Il aurait fallu organiser le pique-nique le **19 mai**, il aurait été présents **2 905 653 665** invités.

Exercice n°2

Les nombres de Friedman

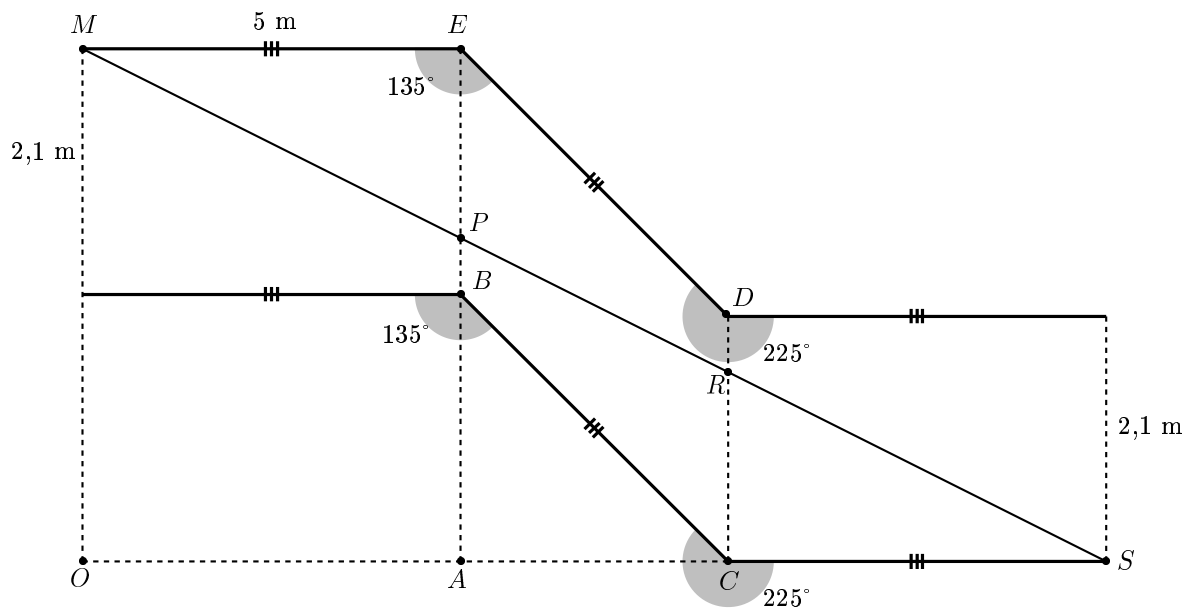
8 points

Il n'y a peut-être pas unicité pour tous les nombres.

25 = 5 ²	121 = 11 ²	125 = 5 ¹⁺²	126 = 6 × 21
127 = -1 + 2 ⁷	128 = 2 ⁸⁻¹	153 = 3 × 51	216 = 6 ²⁺¹
289 = (8 + 9) ²	343 = (3 + 4) ³	347 = 7 ³ + 4	625 = 5 ⁶⁻²
688 = 8 × 86	736 = 7 + 3 ⁶	1022 = 2 ¹⁰ - 2	1024 = (4 - 2) ¹⁰
1206 = 6 × 201	1255 = 5 × 251	1260 = 6 × 210	1285 = (1 + 2 ⁸) × 5
1296 = 6 ^{(9-1)/2}	1395 = 15 × 93	1435 = 35 × 41	1503 = 3 × 501
1530 = 3 × 510	1792 = 7 × 2 ⁹⁻¹	1827 = 21 × 87	2048 = 8 ⁴ /2 + 0
2187 = (2 + 1 ⁸) ⁷	2349 = 29 × 3 ⁴	2500 = 50 ² + 0	2501 = 50 ² + 1
2502 = 2 + 50 ²	2503 = 50 ² + 3	2504 = 50 ² + 4	2505 = 50 ² + 5
2506 = 50 ² + 6	2507 = 50 ² + 7	2508 = 50 ² + 8	2509 = 50 ² + 9
2592 = 2 ⁵ × 9 ²	2737 = (2 × 7) ³ - 7	2916 = (1 × 6 × 9) ²	3125 = (3 + 1 × 2) ⁵
3159 = 9 × 351	3281 = (3 ⁸ + 1)/2	3375 = (3 + 5 + 7) ³	3378 = (7 + 8) ³ + 3
3685 = (3 ⁶ + 8) × 5	3784 = 8 × 473	3864 = 3 × (6 ⁴ - 8)	3972 = 3 + (9 × 7) ²
4088 = 8 ⁴ - 8 - 0	4096 = (4 + 0 × 9) ⁶	4106 = 4 ⁶ + 10	4167 = 4 ⁶ + 71
4536 = 56 × 3 ⁴	4624 = (64 + 4) ²	4628 = 68 ² + 4	5120 = 5 × 2 ¹⁰
5776 = 76 ⁷⁻⁵	5832 = (2 × 5 + 8) ³	6144 = 6 × 4 ⁴⁺¹	6145 = 6 × 4 ⁵ + 1
6455 = (6 ⁴ - 5) × 5	6880 = 8 × 860	7928 = 89 ² - 7	8092 = 90 ² - 8
8192 = 8 × 2 ⁹⁺¹	9025 = 95 ² + 0	9216 = 1 × 96 ²	9261 = 21 ⁹⁻⁶

Exercice n°3**Le rayon vert**

8 points

On compare AB et AP :

- Dans le triangle ABC rectangle en A , $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$

Donc $\cos 45^\circ = \frac{AB}{5}$ donc $AB = \frac{5}{2}\sqrt{2} \approx 3,536 \text{ m}$

- D'après le théorème de Thalès, $\frac{SA}{SO} = \frac{SP}{SM} = \frac{PA}{MO}$ donc en particulier $\frac{SA}{SO} = \frac{PA}{MO}$

Pour connaître SO et SA , il faut d'abord calculer AC :

Dans le triangle ABC rectangle en A , $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ donc $\sin 45^\circ = \frac{AC}{5}$ donc $AC = \sin 45^\circ \times 5 \text{ m}$

Ainsi $SO = 5 + 5 \times \sin 45^\circ + 5 = 10 + 5 \times \sin 45^\circ \approx 13,536 \text{ m}$

Et $SA = 5 + 5 \times \sin 45^\circ \approx 8,536 \text{ m}$

D'où $\frac{8,536}{13,536} = \frac{AP}{3,536 + 2,1}$ donc $AP \approx 3,354 \text{ m}$

Ainsi, $AP > AB$ ce qui signifie que le rayon passe entre B et E .

On compare CR et CD :

- $CD = 2,1 \text{ m}$

- D'après le théorème de Thalès, $\frac{SC}{SO} = \frac{SR}{SM} = \frac{RC}{MO}$ en particulier $\frac{SC}{SO} = \frac{RC}{MO}$

Donc $\frac{5}{13,536} = \frac{RC}{3,536 + 2,1}$ d'où $RC \approx 2,082 \text{ m}$

Donc $RC < RD$ ce qui signifie que le rayon passe entre C et D .

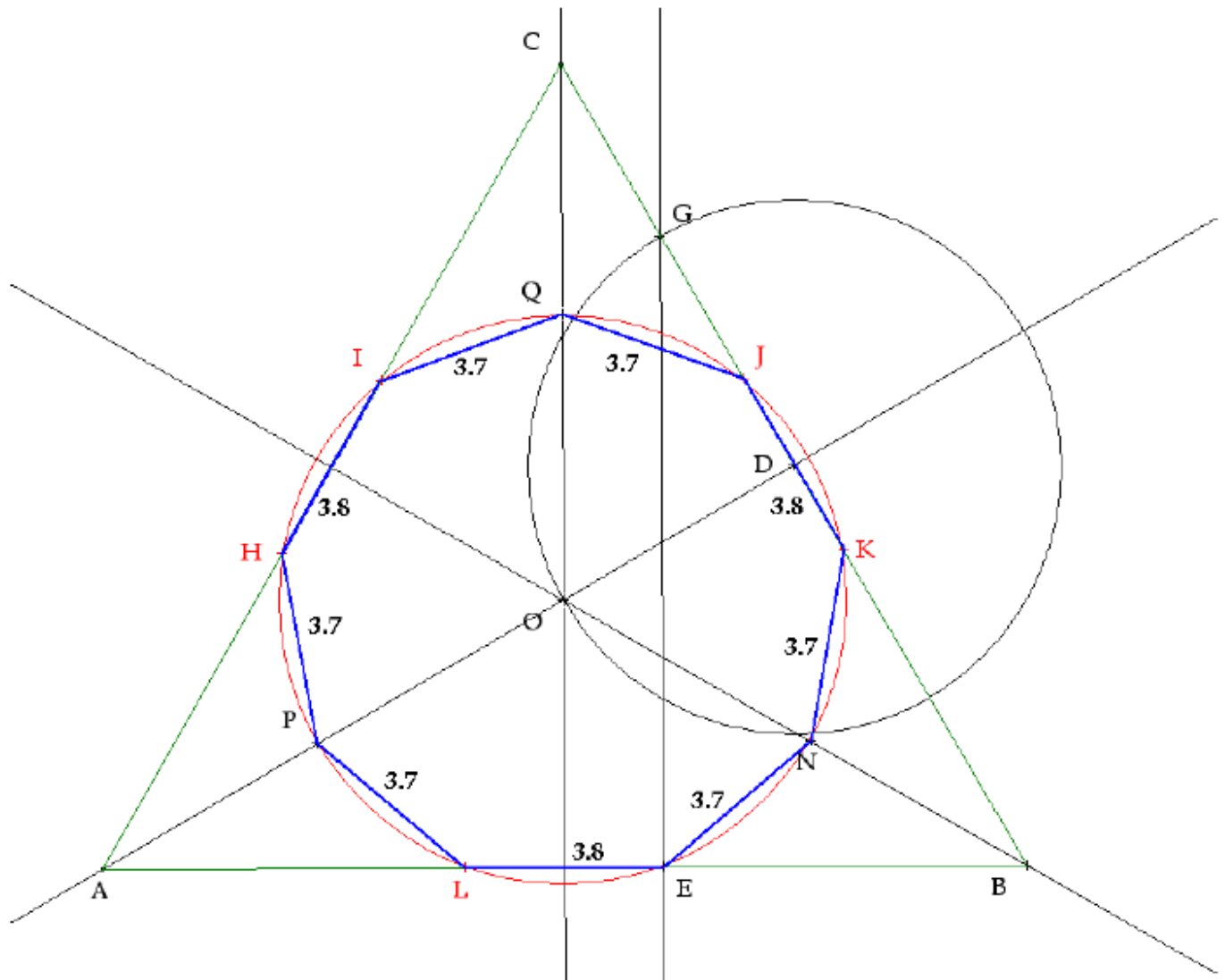
Conclusion : Margot peut atteindre Stéphane avec son rayon laser.

Exercice n°4**My fortune for 10 €!****5 points**Notons x le montant cherché.

1er magasin : $(x + x - 10) = (2x - 10)$

2ème magasin : $(2x - 10) + (2x - 10) - 10 = (4x - 30)$

3ème magasin : $(4x - 30) + (4x - 30) - 10 = 8x - 70$

Donc $8x - 70 = 0$ ce qui donne $x = 8,75$ €.**Exercice n°5****Tout neuf!****5 points**

Ce polygone est presque régulier car ses côtés, inscrits dans un cercle, ont quasiment la même longueur (entre 3,7 et 3,8 unités).

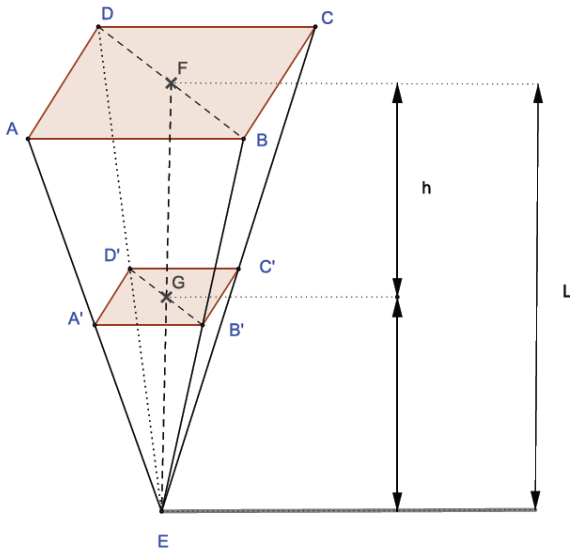
Ce polygone à 9 côtés s'appelle un enneagone. Il n'est pas constructible exactement à la règle et au compas.

(Construction proposée par Michel Touil)

Exercice n°6

La cuve à bois

8 points



1. La pyramide est représentée ci-contre.
On cherche $h = FG = GE$.

La grande pyramide $(ABCDE)$ est un agrandissement de la petite $(A'B'C'D'E)$ avec un rapport 2.

Donc $L = 2h$ et la différence des volumes de la grande pyramide $(ABCDE)$ et de la petite $(A'B'C'D'E)$ est :

$$0,5 = \frac{1}{3} \times 1^2 \times L - \frac{1}{3} \times 0,5^2 \times h = \frac{1}{3} [2h - 0,25h] = \frac{1,75}{3} h$$

$$D'où : h = \frac{3 \times 0,5}{1,75} \approx 0,8571.$$

L'unité est le mètre.

2. Pour faire le patron, on a besoin de calculer les dimensions des plaques. Considérons la "diagonale" de la pyramide $DBB'D'$ ($DB = \sqrt{2}$) :

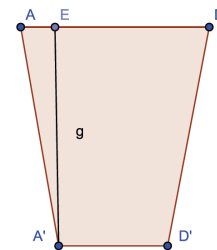
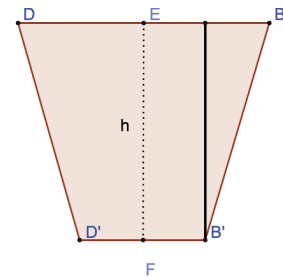
$$DD'^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + h^2 = \frac{1}{8} + h^2 \approx 0,8596$$

$$DD' \approx 0,9272$$

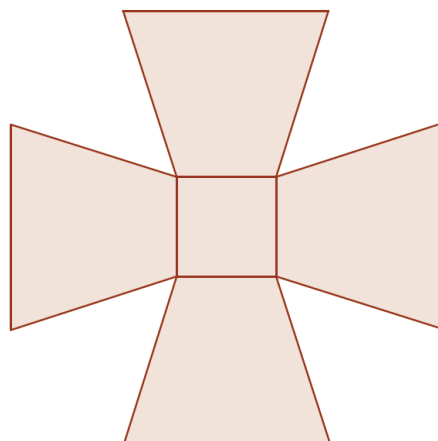
Puis, sur une "face" $ADD'A'$: $AA'^2 = g^2 + 0,25$

$$g^2 \approx 0,7946$$

D'où $g \approx 0,8914$ m.



Le patron est de la forme :



À l'échelle $\frac{1}{20}$, les dimensions de ce patron sont les suivantes (en cm) :

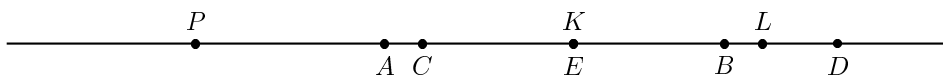
petit carré intérieur : coté 2,5 cm ; grande largeur de chaque plaque : 5 cm ;
hauteur de chaque plaque : 4,46 cm (soit 4,5 cm) ; largeur totale du patron : 11,5 cm.

D'autres dispositions sont évidemment possibles.

Exercice n°7

Lycée - Dîner - Ciné

8 points



Notations des points de la droite représentant la rue :

- P (piscine), K (cinéma), L (lycée);
- pour les domiciles : A (Aïcha), B (Benoît), C (Cixi), D (Dimitri), E (Elie).

On note pour tout point M de la droite $\ell(M) = ML + LM + MP + PM + MK + KM$

1. Trajet de Aïcha : $\ell(A) = 4$ km .
2. Calcul de BL : B est dans $[LK]$ donc $BL + LK = 0,5$ km et comme $\ell(B) = 3,8$ km on a $2PB = (3,8 - 1)$ km d'où $PB = 900$ m et $BL = 100$ m .
3. Calcul de CL : grâce à la question 2., comme C est distinct de B , C n'est pas dans $[KL]$.
 C n'est pas non plus en dehors de $[PL]$ car si M est à gauche de P on a $\ell(M) > 5$ km et si M est à droite de L on a $\ell(M) > 4$ km. Ainsi C est dans $[PK]$ d'où $CP + CK = 1$ km. Comme on a $\ell(C) = 3,8$ km on en tire $LC = 900$ m d'où $KC = 400$ m .
4. Calcul de LD : Dimitri ne peut habiter entre P et L car si D est dans $[PK]$ on a $\ell(D) < 5$ km et si D est dans $[KL]$ on a $\ell(D) < 4$ km . On a alors $\ell(D) = 4 + 6LD$ et comme $\ell(D) = 5,2$ km $LD = 200$ m avec D à droite de L .
5. $E = K$. En effet $\ell(K) = 3$ km et si M est distinct de K on a $\ell(M) > 3$ km.
On a déjà vu que si M est en dehors de $[PL]$ on a $\ell(M) > 4$ km.
Si M est dans $[PK]$ et distinct de K on a $\ell(M) = 2 + ML + LM > 3$ km ;
si M est dans $[KL]$ et distinct de K on a $\ell(M) = 1 + MP + PM > 3$ km.
Ainsi K est le seul point où la fonction ℓ est minimale.

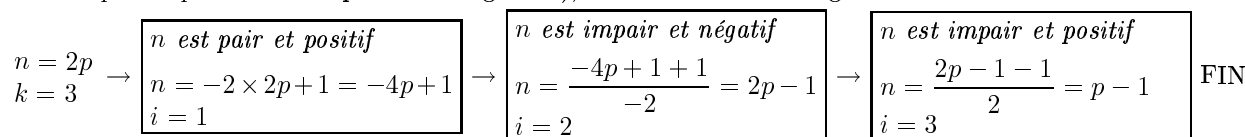
Exercice n°8

Un, deux, trois p'tits tours

8 points

1.
 - $n = 0$
 $k = 3$ → $\begin{matrix} n = 1 \\ i = 1 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 0 \\ i = 2 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 1 \\ i = 3 \end{matrix}$ FIN
 - $n = -1$
 $k = 3$ → $\begin{matrix} n = 0 \\ i = 1 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 1 \\ i = 2 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 0 \\ i = 3 \end{matrix}$ FIN
 - $n = 14$
 $k = 3$ → $\begin{matrix} n = \\ -27 \\ i = 1 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 13 \\ i = 2 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 6 \\ i = 3 \end{matrix}$ FIN
 - $n = -16$
 $k = 3$ → $\begin{matrix} n = \\ -31 \\ i = 1 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 15 \\ i = 2 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 7 \\ i = 3 \end{matrix}$ FIN
 - $n = 2011$
 $k = 3$ → $\begin{matrix} n = \\ 1005 \\ i = 1 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = 502 \\ i = 2 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} n = \\ -1003 \\ i = 3 \end{matrix}$ FIN

2. Si l'on fait fonctionner cet algorithme avec $k = 3$, sur un entier pair supérieur ou égal à 2 (c'est-à-dire de la forme $2p$ avec p un entier supérieur ou égal à 1), on obtient les affichages successifs suivants :



3. Avec $k = 1$, les nombres n qui donnent -2011 comme affichage final sont : 1006 et -1006 .
4. Avec $k = 3$, les nombres n qui donnent 2011 comme affichage final sont : 16095, -16095 , 4024, -4024 , 4025 et -4025 .